

С.Н. Нұрқасымова
А.Б. Жаныс

А.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
(E-mail: saulenurkasim@mail.ru)

Физикада дифференциалдық теңдеулер қолданылатын есептерді MAPLE бағдарламасында модельдеу

Аңдатпа. Мақалада жоғарғы оқу орындарында физикада дифференциалдық теңдеулерді қолданатын есептерді шешуде MAPLE бағдарламасын қолданып, компьютерлік модельдеу қарастырылған. Сонымен қатар, MAPLE бағдарламасына қысқаша түсініктеме берілген және молекулалық физика бөлімінен есептердің модельдеу жолдары көрсетілген. MAPLE – аналитикалық есептеулер жүйесі, яғни онда алгебралық өрнектерді түрлендіру, дифференциалдық теңдеулерді есептеу, анықталмаған және анықталған интегралдарды есептеу, күрделі графиктер сызу және т.б. көптеген амалдарды орындауға болады. Сонымен қатар мақалада физика есептерін шешу барысында MAPLE бағдарламасының дифференциалдау командасын қолдануға болатыны қарастырылған.

Түйін сөздер: Физикалық есептерін компьютерде модельдеу, MAPLE программасы, физика дифференциалдық теңдеулерді MAPLE бағдарламасында модельдеу.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-6895-2022-140-3-174-180>

Кіріспе

Физика пәні бойынша есептер шығару білім алушылардың оқу материалдарын сапалы да сапалы түрде терең игеруіне қолайлы жағдай туғызады және олардың алған теориялық білімдерін практикада қолдана білу қабілеттерін қалыптастырады, бекітеді. Сонымен қатар есеп шығару білім алушылардың өздігінен ойлануын, логикалық мүмкіндіктерін, қиыншылықтарды жеңуін және табандылығын арттырады. Физика есептері теорияны меңгеру барысындағы басты құралдарының бірі болып есептелетіндіктен білім үрдісін жақсартуға түседі. Барлық оқу орындарында физика есептерін шешу практикалық сабақтарда, білім алушылардың өздік жұмыстарын орындау кезінде қолданады.

Мақалада MAPLE компьютерлік бағдарламаларын қолдану, бағдарламаның негізгі функциялары мен бағдарлама тілдері және физикада дифференциалдық теңдеулерді шешу бағытында модельдеу мысалдары қарастырылған.

Білім беру саласында Ғылыми-техникалық бағыты өсуіне байланысты сауатты мамандар даярлау, білім беру барысында жаңа технологияларды қолдану қажеттілігін алға қоюда. Жаңа технологияларды шешу – оқу процесін ақпараттандыру, компьютерлендіру, жаңа заманға сай білім беру. Физика саласының мамандарына зерттеулер мен білім беру саласында компьютерлерді қолдану бойынша маңызды нәтижелер, зерттеу әдістері және жаңа техникалық жабдықтармен таныс болуы тиіс. Қазіргі кезде бұл салада MAPLE ком-

пьютерлік бағдарламаларын қолдану және басқада көптеген компьютерлік бағдарламалар қолданылуымен қатар модельдеу болып табылады. Бағдарламалардың ішінде физика пәнінен дифференциалдық теңдеулерді шешуде MAPLE компьютерлік бағдарламалары есептеулерді автоматтыңдыруға арналған бағдарламалар ішінде ерекше орын алады.

Жалпы бүгінгі таңдағы физиктерге қойылатын талаптар табиғаттағы құбылыстарды түсіндіріп қана қоймай, сонымен бірге зерттеу, моделдеу дағдыларына да ие болулары тиіс. Сол себепті мақалада әлемнің алдыңғы қатарлы университеттері мен ғылыми орталықтарында кеңінен қолданылатын MAPLE компьютерлік бағдарламалары мен физикалық процестерді моделдеу негіздері қарастырылады. MAPLE бағдарламасы бүгінгі таңдағы кең таралған бағдарлама, автоматтандырылған математикалық есептеулер жүйесі болып табылады. Онда көптеген математикалық есептеулер тек дайын функцияларды пайдалану жолымен шешіледі. Бұл бағдарлама негізінен сандық есептеулерді орындау мен сараптама жасау үшін қолданылады. MAPLE бағдарламасын қолданып аналитикалық есептеулер, алгебралық өрнектерді түрлендіру, берілген функциядан аналитикалық түрде туындыларды есептеу, анықталмаған және анықталған интегралдарды есептеу, күрделі графиктер сызу және т.б. көптеген амалдарды орындауға болады.

MAPLE бағдарламасы бүкіл адамзат тарихындағы математикалық есептеулер саласындағы барлық әдістерді қамтыды және күшті есептеу жүйесіне айналды. Бұл бағдарламада математикалық функциялар матрицалар, комплекс сандар, вектор және полиномдармен бірге электротехникалық, радиотехникалық және т. б. көптеген қолданбалы функциялар бар. Бұл бағдарламаның тағы бір тиімділігі ашықтылығында, яғни MAPLE құрамына енетін функцияларды мәтін түрінде жазылған m-файлдар және C тіліндегі бағдарламаларға өзгертулер қолдана отырып, қосымшаларды қарастыруға болады, сонымен қатар сандық әдістер арқылы визуалдық және графикалық функциялармен толықтыруға болады [1].

MAPLE бағдарламасында сызықтық алгебра, аналитикалық геометрия, ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика, сандар теориясы, сандық аппроксимация, сызықтық оптимизация, қаржылық математика т.б. мәселелерін шешу мүмкіндіктері бар. Сондай-ақ MAPLE бағдарламасы арқылы күрделі функцияның графигін немесе үш өлшемді беттің кескіндерін тұрғызуға болады. Интуитивтік - айқын және қарапайым MAPLE тілі арқылы есептердің шешімін, шешу жолдарын және бағдарламалар жасауға мүмкіндік береді. Физика есептерін шешу барысында MAPLE бағдарламасының өзі шешімдерді құралған немесе библиотекалық функциялар түрінде көрсетеді. MAPLE бағдарламасында жалпы есептерді шешу барысында тек математика саласына тиісті мамандар ғана емес, сонымен бірге басқа да саладағы мамандар қолдануға мүмкіндіктері бар. Ең бір ерекшелігі бағдарламаларды зерттеулер барысында қолданылатын математикалық модель туралы түсінігі болуы қажет.

Бағдарлама құрастыру барысында анимациялық графиктерді сызу, тұрғызу барысында MAPLE бағдарламасының білім алушыларға қозғалыс заңдылығын немесе денелердің өзара әсерлесуін экранда көрнекті түрде толығымен көрсетіп бере алады. Білім алушылар үшін MAPLE бағдарламасы әртүрлі математикалық әдістерді үйренуде бағасы жоқ көмекші құрал болып табылады. MAPLE бағдарламасының аналитикалық есептер жүйесінде арнайы “білім алушылар” атты пакет кіреді. Оның құрамында білім алушылар орындайтын әртүрлі математикалық түрлендірулерге арналған функциялардың үлкен тобы бар, бөліктеп интегралдау, анықталған және анықталмаған интегралдағы айнымалыларды ауыстыру, функцияның max және min мәнін табу, т.б. болып табылады [5].

Жалпы бағдарламаларды қарастыру барысында MAPLE аналитикалық есептеулер жүйесі интерактивті жүйе болып табылады, яғни қолданушы MAPLE тілінде команданы немесе операторды енгізіп компьютердің <Enter> пернесін басатын болса, онда анализатор оны орындайды. Егер команда дұрыс енгізілген

болса, онда орындалу барысының қорытынды бөлімінде бағдарламаның орындалған нәтижесі шығады. Егер онда синтаксистік қателіктер болса немесе орындағанда қателік болса жүйе осы туралы хабарды жазып шығарады. Қатені түзету үшін операторға қайта оралып, оны түзетіп, тағы қайта орындау керек. Енгізілген команданы орындағаннан соң жүйе қолданушыдан келесі команданы күтеді. Жалпы барлық уақытта жұмыс парағындағы командаға немесе операторға қайтадан оралуға және оны түзетіп, қайта орындауға болады. Өйткені егер жұмыс парағында жаңадан есептелінген нәтижені қолданатын команда бар болса, онда оны да қайтадан есептеу керек, курсорды оған апарып <Enter> пернесін басуға болады. Ал егер мұндай командалар көп болса команданы Edit, Execute, Worksheet графикалық интерфейсі арқылы орындауға болады. Бұл графикалық интерфейстер жұмыс парағындағы барлық командаларды қайта есептеу үшін арналған. Әрбір оператор немесе команда міндетті түрде белгілеулер енгізу арқылы аяқталу керек. Бұл белгілерді MAPLE бағдарламасында мына түрде белгілеп, көрсетуге болады, яғни екеу: (;) және (:).

Жалпы сөйлем (;) белгісімен аяқталса, онда ол есептеледі. Ал қорытынды бөлігінде болса, онда нәтижесі көрсетіледі [4].

Ал берілген сөйлем (:) белгісімен аяқталса, онда команда орындалады, бірақ оның жұмысының нәтижесі жұмыс парағының қорытынды бөлігінде шықпайды. Сондықтан MAPLE бағдарламасында бағдарлау барысында циклдік оператордан алынған қандай да бір аралық нәтижелердің қорытындыға қажет болмағаны ыңғайлы болады. Сонда нәтижелері қорытынды сияқты шыға беретін болса, онда көп орынды алуы мүмкін және оны кескіндеп шығару үшін айтарлықтай көп уақытты талап етуі мүмкін.

Өрнектерді түрлендіру командалары MAPLE бағдарламасымен жұмыс атқарған кезде бағдарлама жасаушы өзі айнымалы қабылдап, оған белгілі бір символдық өрнекті меншіктейді. Қойылған есептің шешу алгоритіміне сәйкес оларға амалдар қолданады. Ол үшін стандартты функцияларды немесе жазылған меншікті процедураларды қолда-

нуға тура келеді. Стандартты командаларды шақыру синтаксисі мына түрде белгілеп, қарастыруға болады:

Команда (пар1,пар2,...,пар n);

немесе

Команда (пар1, пар2,...,пар n):

Бұл жерде “команда” шақырылып жатқан функцияның аты болса, онда пар1,пар2,... парn - команданың орындалуы үшін қажет болатын параметрлер болып табылады. Бұл шамалар айнымалы немесе өрнек болуы мүмкін, яғни олардың түрі қолданып жатқан функцияның түріне сәйкес келуі қажет.

MAPLE бағдарламасындағы функциялар жүйесі интуитивті қарапайым, сондықтан функцияның аты ол орындайтын амалға сәйкес болып келеді. Сонымен қатар, ескере кететін бір жағдай, ол барлық функциялардың аттары ағылшын тілінде берілетін болады. Мысалы, Simplify атты функция берілген параметрге байланысты өрнектерді ықшамдайтын болсақ, онда кейбір командалар екі түрде болады: активті және пассивті. Бұл жерде команданың актив түрін қолданған жағдайда, оның аты кіші әріптерден басталады. Ал команданың пассив түрі MAPLE бағдарламасының ядросында орындалмайды. Ол тек қана қорытынды бөлігінде жұмыс істей алатындығы туралы математикалық жолда кескінделеді де, аты бас әріптен басталады. Сонда бұл жағдайда үшін value командасы арқылы есептеуге болады, бірақ команданың пассив түрі негізінен жүргізіліп отырғын математикалық амалдарды құжаттау құралы ретінде пайдалануға арналған. Сондықтан екі түрдегі командаларға мысал ретінде дифференциалдау амалы Diff және diff, ал интегралдау амалы Int және int сияқты белгілеулер енгізілетін болады.

Жалпы енді осы екі пассив және актив түрдегі командалар түсінікті болу үшін, төмендегідей белгілеулер арқылы мысалдармен көрсетуге болады:

>g:= Int(sin(x)^2,x);

g:= $\int \sin(x)^2 dx$

>value(g);

$-\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{1}{2} x$

>g:=int(sin(x)^2,x);

$$g := -\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{1}{2} x$$

Осы аналитикалық түрлендірулерде жиі қолданылатын MAPLE бағдарламасының командалары мен функциялары оның жүйелік ядросында орналасады, яғни есептеулер жүйесінің бағдарламасын қамтамасыз ету бөлігінде орналасқан. Ол барлық уақытта компьютердің жадында сақталады. Мұндай командаларға өрнектерді түрлендіретін, теңдеулер немесе теңдеулер жүйесінің шешімдерін таба алатын, функцияларды дифференциалдау жатады. Физикалық процестерді MAPLE бағдарламасында моделдеу физика бөлімдерінен алынған есептерді шешу, моделдеу қарастырылған. Физика пәнінен дифференциалды есептерді модельдеудің негізгі міндеттерінің бірі – оқу процесінде білім алушылардың жаңаша көзқарастарын қалыптастыру және оны дамыту, сонымен қатар негізгі мәселе – білім алушылар танымын кеңейту және модельдеуге бейімделуін қалыптастыру. Негізінде физика бөлімдеріндегі бір физикалық процестің өзінен бірін-бірі толықтырып отыратын бірнеше модель жасауға болады [4].

Физика есептерінде кездесетін қарапайым дифференциалдық теңдеулерді және олардың жүйесін шешу үшін dsolve командасын немесе дифференциалдық теңдеудің сандық шешімдерін табуға мүмкіндік беретін detools функциялар пакетін қолдануға болады. Жалпы dsolve командасы көмегімен дифференциалдық теңдеудің аналитикалық толық шешімін қарастыруға болады. Физика есептерін шешу барысында MAPLE бағдарламасы тек физика саласына тиісті мамандар ғана емес, сонымен бірге басқа да саладағы мамандар қолдануға болады. Негізгі талап олар өздерінің зерттеулерінде қолданылатын математикалық, физикалық модель туралы жалпы түсініктері болуы қажет. MAPLE бағдарламасы тек физика, математика пәндерінде ғана емес, сонымен бірге техникалық пәндерде де қолданылады. Жалпы осы тақырыптарға байланысты MAPLE бағдарламасын қолданудың

ерекшеліктерін көрсету үшін физика пәнінің молекулалық физика бөлімінен алынған есептеріне дифференциалдау, интегралдау амалдарын қолданып есептерді шешу, модельдеу мысалдарын қарастырамыз:

№ 1 есеп

Ыдыста зат мөлшері 1,2 моль-ге тең газ орналасқан. Бұл газды идеал газ деп есептеп, u жылдамдықтары $v_{\text{м}}$ ықтимал жылдамдықтың 0,001 шамасынан кіші болатын ΔN молекула санын анықтау керек [2].

Шешуі:

Бұл есепті шығару үшін келесі формуланы қолданамыз:

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du \quad (1)$$

бұл теңдеуде N- молекулалардың толық саны. Бұл салыстырмалы жылдамдығы u-дан u+du –ға дейінгі аралықтағы молекулалардың саны.

Есептің шарты бойынша жылдамдықтың максимал мәні $g_{\text{max}}=0,001$ $g_{\text{в}}$ осыдан $u_{\text{max}} = g_{\text{max}} / g_{\text{в}} = 0,001$.

Молекула санын келесі (1) формуласын интегралдау арқылы анықтаймыз:

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\text{max}}} e^{-u^2} u^2 du$$

Сонымен қатар молекулалардың санын N зат мөлшері v және Авогадро саны арқылы N_A есептейміз:

$$N = v N_A.$$

MAPLE бағдарламасын қолданып, былайша жазуға болады:

$$>dN := \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \exp(u^2) u^2 du$$

$$>u0:=0$$

$$\frac{4Ne^{-u^2}u^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$0$$

$$> u_{\text{max}} := 0.001$$

$$0,001$$

$$>\Delta N = \int_0^{u_{\text{max}}} dN du$$

$$7,522525900 \cdot 10^{-10} N$$

$$>N:=v \cdot N_A$$


```
vNa
>v:=1.2
1,2
>Na:=6.02*1023
6,02000000*1023
>ΔN
5,434272710 *1014
>ΔN
Сонымен сан мәні:
ΔN = 5,43•1023
```

№ 2 есеп

Молекулалардың импульс бойынша таралу $f(p)$ функциясын біле отырып, импульстің орташа $\langle p^2 \rangle$ мәнін анықтау керек [2].

Шешуі:

Импульстің орташа квадратын $\langle p^2 \rangle$ үшін мына формуланы қолданамыз:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty p^2 f(p) dp}{\int_0^\infty f(p) dp}$$

Молекулалардың импульс бойынша таралу функциясы мына түрде жазылады:

$$f(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)} p^2$$

Бұл таралу функциясы бірге қатысты алынған, яғни:

$$\int_0^\infty f(p) dp = 1$$

Бұл өрнекті ескере отырып, $\langle p^2 \rangle$ мәнін түрде жазуға болады:

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty p^2 f(p) dp$$

Ізделінген $\langle p^2 \rangle$ мәнін былайша есептейміз:

$$>f:=4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} \cdot \exp \left(-\frac{p^2}{2 \cdot m \cdot k \cdot T} \right) \cdot p^2;$$

$$\pi \sqrt{2} \left(\frac{1}{\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{p^2}{m k T}} p^2$$

>z:=p²f;

$$p^4 \pi \sqrt{2} \left(\frac{1}{\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{p^2}{m k T}}$$

$$>p2sr:=\int_0^\infty z dp;$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2} \left(3 m k T \sqrt{\pi} \sqrt{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{m k T}} p \right) \right. \right.$$

$$\left. -6 m k T p e^{-\frac{1}{2} \frac{p^2}{m k T}} \sqrt{\frac{1}{m k T}} - 2 p^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{p^2}{m k T}} \sqrt{\frac{1}{m k T}} \right)$$

$$> \text{assume} \left(\frac{1}{2 \cdot m \cdot k \cdot T} > 0 \right);$$

$$>p2:=\text{evalf}(p2sr);$$

$$p2=3.m \cdot k \cdot T$$

Сонымен, шешуі $\langle p^2 \rangle = 3mkT$.

Қорытынды

Қортындылай келе, мақалада қарастырылып отырған физика есептерін шешуде математикалық дифференциалдау, интегралдау амалдарын қолданып теңдеулерді шешуде, модельдеуде MAPLE бағдарламасын қолданылған. Бұл бағдарлама білім алатын студенттер мен магистранттар өздігінен білім алуына, сонымен қатар білім алушылардың кәсіби дайындығына, мотивацияның дамуына, өзіндік жұмыстарды ұйымдастырылуларына байланысты қажет болуы мүмкін.

Физика есептерін шешу барысында MAPLE бағдарламасы тек физика саласына тиісті мамандар ғана емес, сонымен бірге басқа да саладағы мамандар қолдануға мүмкіншіліктері бар. Негізгі талап олар өздерінің зерттеулерінде қолданылатын математикалық модель туралы жалпы түсініктері болуы қажет. MAPLE бағдарламасының ерекшелігі тек физика, математика пәндерінде ғана емес, сонымен бірге техникалық пәндерде де қолданылатындығын көрсету. MAPLE бағдарламасын механиканың кез-келген саласын оқытуда кең түрде пайдалануға, сонымен қатар классикалық теориялық механикадан бастап құрылыс механикасы, кванттық механика т.б. салаларда қолдануға болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Нұрқасымова С.Н., Ашуров А.Е. Физиканы оқытудың компьютерлік әдістері / С.Н. Нұрқасымова, А.Е. Ашуров. – Астана: Мастер ПО ЖШС, 2016. – 187 с.
2. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – Москва, 1981. – 100 с.
3. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. Матросов. – Санкт-Петербург: БХВ – Петербург, 2001. – 100 с.
4. Нұрқасымова С.Н., Ашуров А.Е. Физика және астрономияны оқытуда компьютерлік бағдарламаларды қолдану. . [Электрон. ресурс]. – 2022. – URL: <http://www.kazpatent.kz/ru> (қаралған күні: 01.02.2022).
5. Мартынов Н.Н., Иванов А.П. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование / Н.Н. Мартынов, А.П. Иванов. – Москва: Кудриц - Образ, 2000. – 100 с.

С.Н. Нуркасымова, А.Б. Жаныс

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

**Применение программы MAPLE при решении задач по физике
с использованием дифференциальных уравнений**

Аннотация. В статье рассматривается использование компьютерного моделирования при решении физических задач в ВУЗе.

Приведены краткие описания дифференциальных уравнений и применение алгоритмов задач в программе MAPLE.

Статья в основном носит общий, ознакомительный характер. Применение программы MAPLE позволяет облегчить решение сложных физических задач.

Ключевые слова: моделирование физических задач, процессов, программа MAPLE, дифференциальные уравнения.

S.N. Nurkasymova, A.B. Zhanys

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Application of the MAPLE program for solving problems in physics using differential equations

Abstract. The article discusses the use of computer modeling in solving physical problems in higher education. The article presents a brief description of differential equations and the application of problem algorithms in the MAPLE program.

The article is mainly of a general, introductory nature. The use of the MAPLE program makes it easier to solve complex physical problems.

Keywords: modeling of physical problems, processes, MAPLE program, differential equations.

References

1. Nurkasymova S.N., Ashurov A.E. Fizikany okytudyn komp'yuterlik adisteri [Actual issues of modern equipment and technology], (Master PO ZHSHS, Astana, 2016, 187 p.), [in Kazakh].
2. Chertov A.G., Vorob'yev A.A. Zadachnik po fizike [Physics problem book], (1981, Moscow, 100 p.), [in Russian].
3. Matrosov A. Maple 6. Reshenie zadach vysshej matematike i mekhaniki [Solving problems in higher mathematics and mechanics], (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2001, 100 p.), [in Russian].
4. Nurkasymova S.N., Ashurov A.E. Fizika zhane astronomiyany okytuda komp'yuterlik bagdarlamalary koldanu [Teaching physics and astronomy Use of computer program], Available at: <http://www.kazpatent.kz/ru>, [in Kazakh]. (accessed 01.02.2022).

5. Martynov N.N., Ivanov A.P. MATLAB 5.x. Vychisleniya, vizualizaciya, programmirovaniye [Computing, visualization, programming], (Kudric-Obraz, Moscow, 2000, 100 p.), [in Russian].

Авторлар туралы мәлімет:

Нұрқасымова С.Н. – **корреспонденция үшін автор**, педагогика ғылымдарының докторы, жалпы және теориялық физика кафедрасының профессоры, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

Жаныс А.Б. – Ph.D., С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті «Ақпараттық жүйелер» кафедрасының аға оқытушысы, Астана, Қазақстан.

Nurkasymova S.N. – **Corresponding author**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Zhanys A.B. – Ph.D., Senior lecturer of the Department «Information Systems», S. Seifullin Kazakh Agro Technical University, Astana, Kazakhstan.