



ХҒТАР 14.25.09  
Ғылыми мақала

<https://doi.org/10.32523/2616-6895-2024-149-4-196-208>

## Физикалық құбылыстарды сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді MathCAD қолданбалы бағдарламалар пакеті көмегімен шешу

Г. Р. Кощанова<sup>1</sup>, А.Б.Туркменбаев<sup>1</sup>, Р.С.Шуакбаева<sup>1</sup>, Б.Т.Кулжагарова<sup>1</sup>,  
Г.А.Дуйсенбаева<sup>1</sup>, Г.А.Сугуржанова<sup>2</sup>, А.Б.Мукушев<sup>3</sup>, С.Б.Мукушев<sup>1</sup>,  
Б.А. Адильбекова<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, Ақтау, Қазақстан

<sup>2</sup>Қазақ-Ресей Медициналық университеті, Алматы, Қазақстан

<sup>3</sup>Қазақ технология және бизнес университеті, Астана, Қазақстан

<sup>4</sup>С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті, Астана, Қазақстан

<sup>5</sup>Жоғары көлік және коммуникация колледжі, Астана, Қазақстан

(E-mail: <sup>1</sup>koshanova.k@mail.ru, <sup>2</sup>asset.turkmenbaev@yu.edu.kz,  
<sup>3</sup>rakhat.shuakbayeva@yu.edu.kz, <sup>4</sup>bazargul.kulzhagarova@yu.edu.kz,  
<sup>5</sup>gulzira.duisenbayeva@yu.edu.kz, <sup>6</sup>sugurzhanova22031983@gmail.com,  
<sup>7</sup>abzal-8kz@mail.ru, <sup>8</sup>mba-55@mail.ru, <sup>9</sup>aba83@bk.ru)

**Андатпа.** Дифференциалдық теңдеулерге қатысты оқу материалдары жаңартылып берілген білім мазмұнындағы жоғары сыныптардағы математикаға енгізілген. Қазіргі уақытта «Дифференциалдық теңдеулер» тарауын оқыту әдістемесі қалыптасу жағдайында. Мақалада аталған тарауды оқытуда компьютерлік технологияларды қолдану жолдары зерделенді. Компьютерлік технология құралы ретінде MathCAD қолданбалы бағдарламалар пакеті алынды.

Зерттеліп отырған жұмыста орта мектепте дифференциалдық теңдеулерді игеру барысында аталған теңдеулердің қолданбалылығы ашылған және математика мен физика пәндері арасындағы пәнаралық байланыс принципі басшылыққа алынған. Дифференциалдық теңдеулерді MathCAD пакеті көмегімен шешуге үйрету мектеп оқушыларында компьютерлік технологияларды қолдана білуге бағытталған шеберліктер қалыптастырады. MathCAD пакетін қолдану барысында білім алушы дифференциалдық теңдеудің графиктік және сандық шешімін алуға қажетті шағын бағдарламалар құру әдістерін меңгереді. MathCAD пакеті арқылы физикалық құбылыстарды сипаттайтын сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған мысалдар қарастырылған. Тұтқыр ортадағы дененің қозғалысын, тербелмелі гармониялық және өшетін тербелістердің жағдайларын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулері зерттелген. Аталған дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған MathCAD ортасында бағдарлама жасалып, оларды қолдану технологиясы құрылған.

Сонымен қатар мақалада аталған теңдеулерді шешуде MathCAD қолданбалы бағдарламалар пакетін қолдану алгоритмі қарастырылды.

**Түйін сөздер:** дифференциалдық теңдеулер, қолданбалылық мәселелері, физикалық мазмұндағы есептер, MathCAD қолданбалы бағдарламалар пакеті, теңдеудің графиктік және сандық шешімдері.

## Кіріспе

Дифференциалдық теңдеулер теориясы математика ғылымының негізгі бөліміне жатады. Дифференциалдық теңдеулер жаратылыстану және техникалық ғылымдардың зерттеу әдістемесінде жан-жақты қолданысқа ие болып отыр. Мұның негізгі себебін айтсақ, осы ғылымдарда кездесетін қолданбалы есептерді шешу жағдайында, зерттелетін құбылыстарды сипаттайтын әр түрлі шамаларды байланыстыратын математикалық заңдарды бірден табу мүмкін болмай отыр. Керісінше, белгілі бір құбылысты сипаттайтын шамалар және олардың туындылары арасындағы математикалық тәуелділіктер оңайырақ құрылады. Мұндай тәуелділіктердің математикалық модельдері дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Жаратылыс тану ғылымдары дифференциалдық теңдеулер үшін тың мәселелердің көзі болып табылады және осы ғылымдардың зерттеу әдіснамасын айтарлықтай жетілдіреді [1].

## Зерттеу әдістері

Орта мектептің 11 сыныбына арналған «Алгебра және анализ бастамалары» атты математика оқулығына «Дифференциалдық теңдеулер» атты тарау енгізілген. Аталған тарауды оқып үйрену барысында физика пәнінің мүмкіндігін пайдалануға болады. Өйткені орта мектеп физикасында дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын процестер көптеп кездеседі. Мысалы, тұтқыр ортадағы дене қозғалысының түрлері, өзгермелі массалы дененің қозғалыс заңдары, механикалық және электр тербелістер құбылыстары және т.б. физикалық құбылыстар әр түрлі дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады. Орта мектептегі математиканы оқыту әдістемесінде дифференциалдық теңдеулерді игеруде физика пәніні бойынша оқу материалдарын пайдалану мәселесі жеткілікті түрде шешілмей отыр. Дифференциалдық теңдеулерді оқып-үйренудегі осы олқылықты жоюдың бір шешімі – компьютерлік технологияларды қолдану деп есептейміз.

Біз физикалық құбылыстар мен нысандарды сипаттайтын параметрлер мен олардың туындылары арасындағы байланыстардың дифференциалдық теңдеулерін шешуде MathCAD қолданбалы бағдарламалар пакетін қолдану әдістемесін қарастырамыз. Бұл әдістемені іске асыру төмендегі ретпен (алгоритм) орындалады: 1) кез-келген физикалық үрдістің математикалық моделі жасалады, сөйтіп физикалық құбылыстың негізгі заңдары математика тұрғысынан сипатталады; 2) математикалық модель дифференциалдық теңдеу түрінде жасалады; 3) ерекше жағдайларда дифференциалдық теңдеулер қосымша шарттармен қамтамасыз етіледі; 4) дифференциалдық теңдеуді шешуге арналған MathCAD ортасында шағын бағдарлама құрылады; 5) MathCAD пакеті арқылы дифференциалдық теңдеудің график түріндегі немесе сандық шешімдері алынады; 6) дифференциалдық теңдеу шешімдері талқыланады және қарастырылып отырған физикалық құбылыстың бұрынғы және келешек уақыттардағы жағдайы туралы ақпараттар алынады.

Дифференциалдық теңдеудің жалпы анықтамасы мына мазмұнда: «Аргументі, осы аргументтің белгісіз функциясын және осы функцияның туындысын байланыстыратын теңдеулер дифференциалдық теңдеулер деп аталады» [2-7].

Дифференциалдық теңдеулердің түрлері рет санымен сипатталады. Мысалы, бірінші реттік дифференциалдық теңдеу мынандай түрде болады:

$$F(x;y;y')=0 \text{ немесе } y'=f(x;y)$$

Аталған дифференциалдық теңдеуге мысалдар келтірейік. Бірінші реттік:  $x^2y'+2xy=y$ ; Екінші реттік:  $y''-2xy=x$ ; Төртінші реттік дифференциалдық теңдеу мынандай түрде болады:  $y^{(IV)} - xy'' = 1 - x$ .

Дифференциалдық теңдеулердің шешімі ретінде тәуелсіз  $y$  айнымалының орнына  $y=f(x)$  өрнегін қойғанда нақты теңдік беретін және дифференциалданатын функцияны айтады. Осы тұжырымды дәлелдеу үшін мынандай мысалды қарастырамыз:  $y = x^2$  функциясы  $2y - xy' = 0$  дифференциалдық теңдеудің шешімі болады және мұндағы  $x \in (-\infty; +\infty)$ . Шындығында осы функцияны берілген дифференциалдық теңдеуге қойсақ теңдік орнайды.

Дифференциалдық теңдеудің шешімін есептеп табуды интегралдау деп атайды. Осы себепті бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін табу жағдайында бір параметрге тәуелді болатын жалғыз функцияны ғана емес, бірнеше функциялар жиынын табамыз.

Мысалы,  $y' = \cos x$  теңдеуі берілсін. Туындының өрнегін мына түрде жазамыз:  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Осы жағдайда берілген теңдеу мынандай түрде болады:  $\frac{dy}{dx} = \cos x$

немесе  $dy = \cos x dx$ . Табылған теңдеудің екі жағын да интегралдаймыз:  $\int dy = \int \cos x dx$ . Демек  $y = \sin x + C$  болады.

$C$  тұрақты шама және оның кез келген мәнінде қарастырылған теңдеудің шешімі болатын  $x$ -ті және кез келген  $C$  тұрақты шамаға тәуелді болатын  $y = f(x;C)$  функциясын осы дифференциалдық теңдеудің шешімі деп атаймыз.

**1-анықтама.** Тұрақты шаманың  $C = C_0$  жағдайында  $y = f(x; C)$  теңдеудің жалпы шешімінен шығатын  $y = f(x; C_0)$  функциясы дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі болады.

**2-анықтама.**  $f(y)dy = g(x)dx$  теңдеуімен берілген дифференциалдық теңдеуді айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу деп атайды.

**3-анықтама.**  $f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0$  дифференциалдық теңдеуін айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп атайды.

## Зерттеу нәтижелері

Дифференциалдық теңдеулердің әрбір түрін компьютерлік технология көмегімен шешу жолдарын қарастырайық. Компьютерлік технология ретінде Visual Basic, ABCPascal,

C++, Python, Java, MathCAD және тағы басқа бағдарламалық ортаны пайдалануға болады.

Біз дифференциалдық теңдеулерді оңтайлы шешу құралы ретінде MathCAD қолданбалы бағдарламалық пакетін қолдандық. MathCAD пакеті арқылы физикалық құбылыстарды сипаттайтын сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған мысалдар қарастырамыз [8-11]

1-мысал. Массасы  $m$  кеме тынық су айдынында  $v_0$  жылдамдықпен қозғалсын.  $t=0$  уақыт моментінде оның қозғалтқышы ажыратылды. Су ортасының кеме қозғалысына кедергі күші оның жылдамдығына пропорционал болсын:  $F=-r v$ . Кеме жылдамдығының уақытқа тәуелді теңдеуін табу керек.

Талдау: Қозғалтқышты ажыратқаннан кейін, кемеге тек судың кедергі күші ғана әсер етеді. Демек кемеңіз қозғалыс теңдеуі мынандай түрде болады:

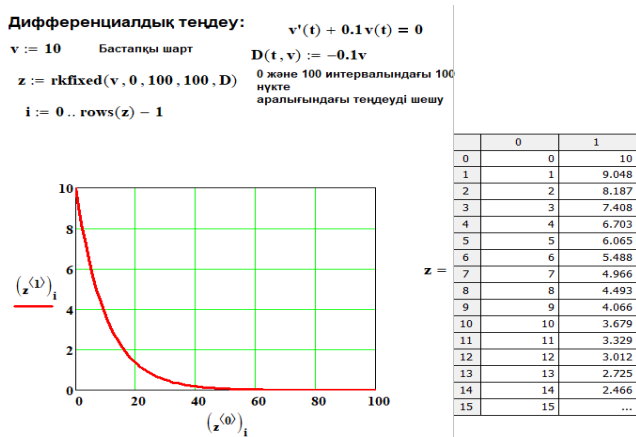
$$-r v = m a \Rightarrow -r v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} + r v = 0$$

Бұл теңдеу бірінші ретті дифференциалдық теңдеу деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің аналитикалық әдісті қолданған кездегі шешімін қарастырамыз. Алдымен  $\frac{dv}{v} = -\left(\frac{r}{m}\right) dt$  теңдеуін интегралдаймыз:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^t \left(\frac{r}{m}\right) dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\left(\frac{r}{m}\right) t \text{ бұдан } v = v_0 e^{-\frac{rt}{m}}$$

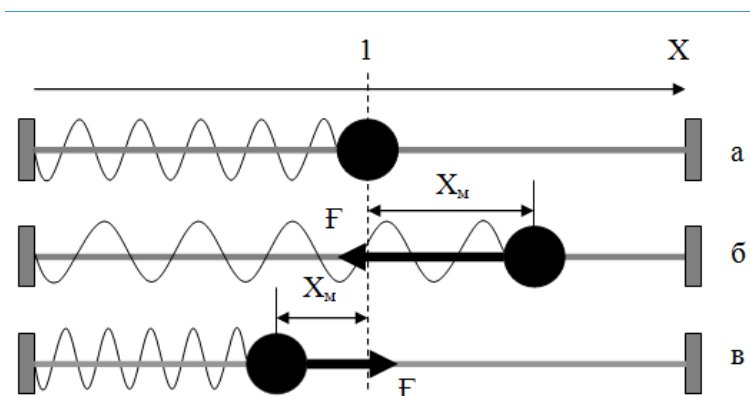
$m \frac{dv}{dt} + r v = 0$  дифференциалдық теңдеуді шешу үшін төмендегі шамаларды енгіземіз:  $m = 20$  кг және  $r = 2$  кг/с. Қайықтың бастапқы жылдамдығы  $10$  м/с. Сонда теңдеу мынандай түрге келеді:  $\frac{dv}{dt} + 0,1 v = 0$ . Теңдеу Рунге-Кутты әдісімен шешіледі. MathCAD пакетіне енгізілген `rkfixed` Рунге-Кутты функциясы көмегімен қайық жылдамдығының  $0$  және  $100$  уақыт интервалы арасындағы  $100$  мәні есептеледі (Листинг 1).

Дифференциалдық теңдеудің графиктік шешімі сол жақта (қызыл түсті график), ал сандық шешімі оң жақтағы кесте түрінде көрсетілген.



Листинг 1

2 мысал. Орта мектепте физика пәні бойынша оқушылар екі түрлі тербелетін жүйемен танысады: математикалық маятник және серппедегі жүктің механикалық тербелістері. Бұл механикалық жүйелер еркін тербелмелі жүйелерге жатады. Еркін тербелмелі жүйеге дене немесе денелер жүйесі ішкі күштер әсерінен еркін тербелістер жасайтын жүйелер мысал бола алады. Математикалық маятник үшін ішкі күш түріне денеге әсер ететін ауырлық күші мен жіптің керілу күшін алмастыра алатын тең әсерлі күш жатады. Ал пружинадағы жүкке серппедегі серпімділік күші ғана әсер етеді және ол ішкі күш болады. Серіппенің серпімділік күшінің әсерінен болатын жүктің горизонталь стержень бойымен жасайтын гармониялық тербелісін қарастырайық (1-сурет).



Сурет 1 – Серппедегі шариктің тербелісі

Гармониялық тербелістер жасайтын дененің координатасы уақытқа байланысты мынандай заңдылыққа бағынады  $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Дене координатасының бірінші (шариктің жылдамдығының теңдеуі) және екінші (үдеуінің теңдеуі) туындыларын есептейміз.

$$x' = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = x_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

Осы екі теңдеуден мына қатыстың орындалатыны белгілі болады:

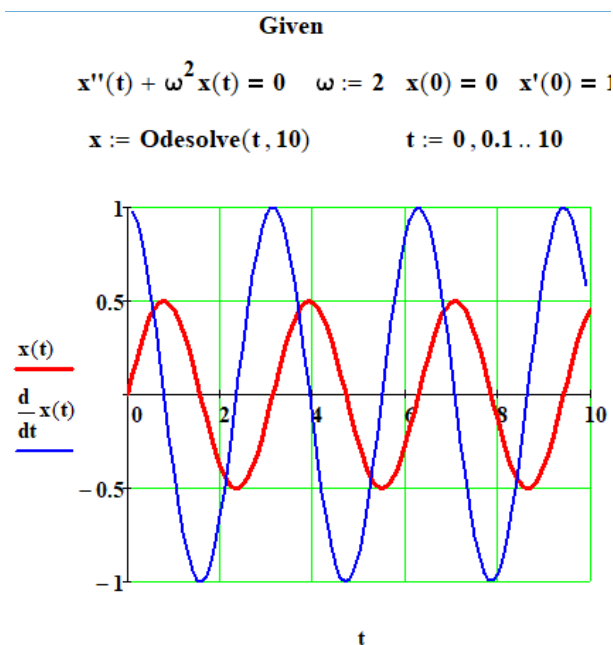
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Табылған теңдеу гармониялық тербелістердің дифференциалдық теңдеуі деп аталады. Бұл теңдеудің аналитикалық шешімі  $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Гармониялық тербелістің дифференциалдық теңдеуі мынандай түрде берілген:  $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ . Осы дифференциалдық теңдеуді MathCAD ортасында шешу әдісін қарастырайық. Тербелістер жасайтын жүктің циклдік жиілігі  $\omega = 2$  рад/с. Бастапқы шарттарды мына түрде жазамыз:  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1.0$ .

Жүктің уақытқа тәуелді жылдамдығының және координатасының график түріндегі шешімін табу керек.

Табылған дифференциалдық теңдеуді сызықтық жағдайда интегралдау үшін MathCAD пакетінен **Given** – **Odesolve** есептеу блогын қолданамыз. Нәтижесінде дифференциалдық теңдеудің график түріндегі шешімдерін табамыз. (Листинг 1).



Листинг 2

Көк түспен берілген график дифференциалдық теңдеудегі функцияның бірінші туындысының графиктік шешімі:  $x'(t) = \frac{d}{dx} x(t)$  (жылдамдықтың теңдеуі).

Қызыл түспен берілген график дифференциалдық теңдеудің нақты шешімі:  $x(t)$  (координата теңдеуі).

*3 мысал.* Кез-келген еркін механикалық тербелістер уақыт өтуімен өшетіні белгілі. Өйткені тербелістегі денеге ортаның кедергі күші әсер етеді. Ортаның кедергі күші дененің жылдамдығына тура пропорционал болған жағдайды қарастырайық. Демек ортаның кедергісі күшінің бағыты жылдамдыққа қарсы болады. Кедергі теңдеуі  $f_{\text{үй}} = -rv$ . Өшетін тербелістер жасайтын дененің қозғалыс теңдеуін мына түрде болады:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta v - kx$$

$v = \frac{dx}{dt}$  екенін ескере отырып және теңдеудегі барлық мүшелерді теңдіктің сол

жағына шығарып, төмендегі теңдеуді жазамыз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Осы теңдеу құрамындағы мүшелерді  $m$  шамаға бөлеміз де мынандай белгілеулер енгіземіз:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ және } \frac{\beta}{m} = 2\delta.$$

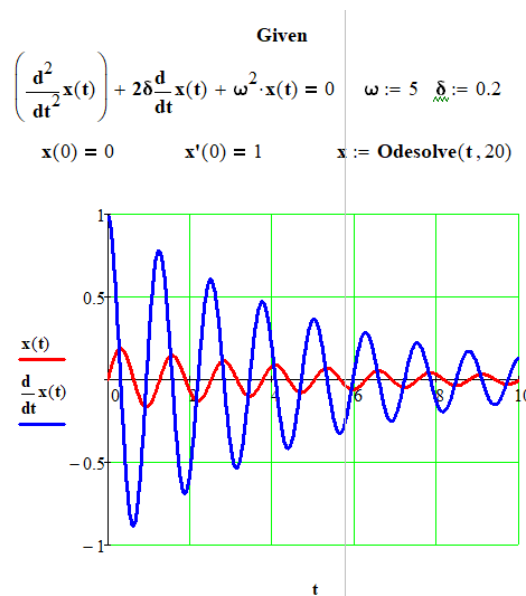
Есептеулер нәтижесінде төмендегі бір текті сызықты дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Табылған теңдеудің аналитикалық шешімі мынандай болады:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Дифференциалдық теңдеудің компьютерлік шешімі төменде көрсетілген (Листинг 3). Көк түспен берілген график жылдамдықтың, ал қызыл берілген график дифференциалдық теңдеудің нақты шешімі:  $x(t)$  (координата теңдеуі).



Листинг 3

### Талқылау

Дифференциалдық теңдеулер теориясының басты бөлімдері кеңейіп, қазіргі уақытта тәуелсіз ғылыми бағытты жасап отыр. Дифференциалдық теңдеулердің көмегімен мынандай өзекті ғылыми мәселелерді шешуге болады: бізді қоршаған ортадағы жанды және жансыз табиғаттың эволюциясын, радиоактивті заттардың ыдырауын, химиялық реакциялардың жылдамдығын және тағы басқа құбылыстардың өзгерісінің белгілі бір параметрлерге тәуелділігі.

Дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістемесінде аналитикалық және жуықтау әдістері негізгі тәсілдер болып саналады. Ал жуықтау әдісі мынандай екі түрге бөлінеді: сандық және графиктік. Дифференциалдық теңдеулерді шешу кезінде аналитикалық әдістерді қолдану шешімді нақты функциялар түрінде алуға мүмкіндік жасайды. Сандық

әдістерді қолдану кезінде тәуелсіз айнымалының берілген нақты мәндеріне сәйкес қажетті шешімнің жуықталған сандық мәндерінің кестесін ала аламыз. Ал графиктік әдістер арқылы дифференциалдық теңдеудің шешімін тек график түрінде алуға болады.

Компьютерлік технология құралдарына жататын MathCAD пакетін қолдана отырып оқушылар дифференциалдық теңдеудің шешетін қажетті шағын бағдарламаларды құрастырды. Осы бағдарламалар көмегімен теңдеудің графиктік және сандық шешімдерін тапты.

### **Қорытынды**

Мақалада орта мектептегі математикада қарастырылатын дифференциалдық теңдеулерді шешу барысында компьютерлік технологияны қолдану жолдары зерттелді. Ұсынылып отырған жұмыс орта мектеп математикасында дифференциалдық теңдеулерді игеру және дифференциалдық теңдеулерді шешу жағдайында қолданбалы бағытты жүзеге асыру әдістемесіне жатады.

Зерттеу барысында төмендегі мәселелер толық шешілді:

Дифференциалдық теңдеулердің қолданбалылық қасиеттері толық ашылды;

Орта мектеп математикасын оқыту үрдісінде физикалық құбылыстарды пайдалану жолдары анықталды;

Дифференциалдық теңдеулерге байланысты мәселелерді оқып үйренуге қажетті физикалық құбылыстар компьютерлік технология көмегімен зерттелді;

MathCAD пакетін қолдана отырып білім алушылар дифференциалдық теңдеудің графиктік және сандық шешімін алуға қажетті шағын бағдарламаларды құрастыру тәсілдерімен танысты;

Дифференциалдық теңдеулерді шешуде MathCAD қолданбалы бағдарламалар пакетін қолдану алгоритмі жасалды.

### **Авторлардың қосқан үлесі:**

**Г.Р. Коцанова** – мақаланы жазуда жалпы басшылық жасады.

**Г.А. Дуйсенбаева** – мақаладағы математика пәніне қатысты материалдарды жинақтады.

**А.Б. Туркменбаев** – мақаланың стилистикасын жасады.

**Г.А. Сугуржанова** – мақаланың ғылыми мәселесін қою және негізгі мәселелерін анықтауға қатысты.

**Р.С. Шуакбаева** – кіріктірілген білім беруді іске асырды.

**С.Б. Мукушев, Б.А. Адильбекова** – мақала материалдарын талқылауға қатысты.

**А.Б. Мукушев** – мақаладағы информатика пәніне қатысты материалдарды жинақтады.

**Б.Т. Кулжагарова** – мақаладағы физика пәніне қатысты материалдарды жинақтады.

### **Әдебиеттер тізімі:**

Әбілқасымова, А.Е., Умиралханов, А.Н., Жадраева, Л.У., Тұяқов, Е.А., Кенжебек, Х.Т. Орта мектепте дифференциалдық теңдеулерді оқыту барысында қолданбалы есептерді шығару әдістемесі // Павлодар мемлекеттік университетінің хабаршысы. 2023 №2. 126-137 б. doi.org/10.48081/AZPB2414



Әбілқасымова, А.Е., Корчевский, В.Е., Жұмағұлова, З.Ә. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналған оқулық. / - Алматы: Мектеп, 2020. - 256 б.

Hijaz Ahmad, Tufail A. Khan, Predrag S. Stanimirovic, Wasfi Shatanawi, Thongchai Botmart. New approach on conventional solutions to nonlinear partial differential equations describing physical phenomena // Results in Physics. Volume 41, October 2022, <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105936>

Effat A. Saied. The non-classical solution of the inhomogeneous non-linear diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. Volume 98, Issues 2-3, February 1999, Pages 103-108. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(97\)10158-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(97)10158-8)

Gürhan Gürarşlan. Numerical modelling of linear and nonlinear diffusion equations by compact finite difference method // Applied Mathematics and Computation. Volume 216, Issue 8, 15 June 2010, P. 2472-2478. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.03.093>

Şuayip Yüzbaşı, Niyazi Şahin. Numerical solutions of singularly perturbed one-dimensional parabolic convection-diffusion problems by the Bessel collocation method // Applied Mathematics and Computation. Volume 220, 1 September 2013, P. 305-315. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.06.027>

J.I. Ramos. A piecewise-analytical method for singularly perturbed parabolic problems // Applied Mathematics and Computation. Volume 161, Issue 2, 15 February 2005, P. 501-512. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.045>

Асланов Р.М. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педагогическом вузе. – М., 1997. – 236 с.

Баврин Г.И. Усиление профессиональной и прикладной направленности преподавания математического анализа в педвузе. На материале курса «Дифференциальные уравнения». – М., 2018. – 202 с.

Гербеков Х.А. Дифференциальные уравнения в системе профессиональной подготовки учителя математики в педвузе. – М., 2015. – 117 с.

Nelson F. Using mathcad to simplify uncertainty computations in a laboratory course // Computer Applications in Engineering Education. – 2014. – Vol. 23. – №2. – P. 250-257. <https://doi.org/10.1002/cae.21593>

**Г. Р. Коцанова<sup>1</sup>, А.Б.Туркменбаев<sup>1</sup>, Р.С.Шуакбаева<sup>1</sup>, Б.Т.Кулжагарова<sup>1</sup>, Г.А.Дуйсенбаева<sup>1</sup>, Г.А.Сугуржанова<sup>2</sup>, А.Б.Мукушев<sup>3</sup>, С.Б.Мукушев<sup>4</sup>, Б.А. Адильбекова<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, Актау, Казахстан

<sup>2</sup>Казахстанско-Российский Медицинский Университет, Алматы, Казахстан

<sup>3</sup>Казахский университет технологии и бизнеса, Астана, Казахстан

<sup>4</sup>Казахский агротехнический исследовательский университет  
им. С. Сейфуллина, Астана, Казахстан

<sup>5</sup>Высший колледж транспорта и коммуникаций, Астана, Казахстан

### **Решение дифференциальных уравнений с помощью пакета прикладных программ MathCAD, характеризующих физические явления**

**Аннотация.** Учебные материалы, относящиеся к дифференциальным уравнениям, включены в последнюю главу математики в старших классах обновленного содержания среднего

образования. В настоящее время методика преподавания главы «Дифференциальные уравнения» находится в состоянии становления. В статье изучены способы применения компьютерных технологий при обучении этой главе. В качестве инструмента компьютерной технологии был выбран пакет прикладных программ MathCAD.

В нашем исследовании раскрыты прикладные вопросы дифференциальных уравнений в процессе обучения школьной математике и принцип межпредметной связи между математикой и физикой. Процесс решения дифференциальных уравнений с помощью пакета MathCAD формирует у школьников умения использования компьютерных технологий. В процессе применения пакета MathCAD студенты обучаются созданию компьютерных программ, необходимых для получения графического и численного решения дифференциального уравнения. Рассмотрены примеры решения линейных дифференциальных уравнений, описывающих физические явления с помощью пакета MathCAD. Исследованы дифференциальные уравнения, характеризующие движение тела в вязкой среде, состояния колебательных гармонических и затухающих колебаний. Разработана программа в среде MathCAD для решения указанных дифференциальных уравнений и создана технология их применения.

Также в статье рассмотрен алгоритм применения пакета прикладных программ MathCAD при решении дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, прикладные вопросы, задачи физического содержания, пакет прикладных программ MathCAD, графические и численные решения уравнений.

**G.R.Kochanova<sup>1</sup>, A.B.Turkmenbayev<sup>1</sup>, R.S.Shuakbayeva<sup>1</sup>, B.T.Kulzhagarova<sup>1</sup>, G.A.Duisenbaeva<sup>1</sup>,  
G.A.Sugurzhanova<sup>2</sup>, A.B. Mukushev<sup>3</sup>, S.B. Mukushev<sup>4</sup>, B.A. Adilbekova<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>*Caspian University of Technology and Engineering named after Sh. Yesenova, Aktau, Kazakhstan*

<sup>2</sup>*Kazakh-russian medical university, Almaty, Kazakhstan*

<sup>3</sup>*Kazakh University of Technology and Business, Astana, Kazakhstan*

<sup>4</sup>*Kazakh Agrotechnical University named after S.Seifullin, Astana, Kazakhstan*

<sup>5</sup>*Higher College of Transport and Communications, Astana, Kazakhstan*

### **Solving differential equations using the MathCAD application software package describing physical phenomena**

**Abstract.** Educational materials related to differential equations are included in the last chapter of mathematics in high school updated content of secondary education. Currently, the teaching methodology of the chapter "Differential Equations" is in a state of formation. The article examines the ways of using computer technology in teaching this chapter. The MathCAD application software package was chosen as a computer technology tool.

Our research reveals the applied issues of differential equations in the process of teaching school mathematics and the principle of interdisciplinary communication between mathematics and physics. The process of solving differential equations using the MathCAD package forms students' skills in using computer technology. In the process of using the MathCAD package, students are trained to create

computer programs necessary to obtain a graphical and numerical solution of a differential equation. Examples of solving linear differential equations describing physical phenomena using the MathCAD package are considered. Differential equations characterizing the motion of a body in a viscous medium, the states of vibrational harmonic and damped oscillations are investigated. A program has been developed in the MathCAD environment for solving these differential equations and a technology for their application has been created.

The article also discusses the algorithm for using the MathCAD application software package for solving differential equations.

**Keywords:** differential equations, applied questions, problems of physical content, MathCAD application software package, graphical and numerical solutions of equations.

### References:

Abylkassymova, A.E., Umiralkhanov, A.N., Zhadrayeva, L.U., Tuyakov, Y.A., Kenzhebek, H.T. Ortamektepte differencialdyq teñdeulerdi oqytu barysynda qoldanbaly esepтерdi shyғaru әdistemesi [Methodology for solving the issue of connected Character in the handle of studying differential Equations in secondary school]. // Bulletin of Pavlodar State University. 2023.- №2.- 126-137 б. doi.org/10.48081/AZPB2414 [in Kazakh]

Abilqasimova, A.E., Korçevskiy, V.E., Jumağulova, Z A. Algebra және analiz bastamaları: Jalpy bilim beretin mekteptiñ jaratylstanw-matematikalıq baғıttaғı 11 sınıfına arnalğan oqwlıq [Beginnings of algebra and analysis : a textbook for the 11th grade of a general education school in the field of science and mathematics] Almaty : Mektep, 2020. – 256 p. [in Kazakh]

Hijaz Ahmad, Tufail A. Khan, Predrag S. Stanimirovic c, Wasfi Shatanawi, Thongchai Botmart. New approach on conventional solutions to nonlinear partial differential equations describing physical phenomena // Results in Physics. Volume 41, October 2022, <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105936>

Effat A. Saied. The non-classical solution of the inhomogeneous non-linear diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. Volume 98, Issues 2–3, February 1999, P. 103-108. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(97\)10158-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(97)10158-8)

Gürhan Gürarşlan. Numerical modelling of linear and nonlinear diffusion equations by compact finite difference method // Applied Mathematics and Computation. Volume 216, Issue 8, 15 June 2010, P. 2472-2478. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.03.093>

Şuayip Yüzbaşı, Niyazi Şahin. Numerical solutions of singularly perturbed one-dimensional parabolic convection–diffusion problems by the Bessel collocation method // Applied Mathematics and Computation. Volume 220, 1 September 2013, P. 305-315. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.06.027>

J.I. Ramos. A piecewise-analytical method for singularly perturbed parabolic problems // Applied Mathematics and Computation. Volume 161, Issue 2, 15 February 2005, P. 501-512. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.045>

Aslanov, R.M. Metodicheskaya sistema obucheniya differentsial'nym uravneniyam v pedagogicheskom vuze [Methodical system of teaching differential equations in a pedagogical university]. Moscow, 1997. – 236 p. [in Russian]

Bavrin, G.I. Usileniye professional'no-prikladnoy napravlennosti prepodavaniya matematicheskogo analiza v pedagogicheskom vuze. V materiale kursa «Differentsial'nyye uravneniya» [Strengthening the

professional and applied orientation of teaching mathematical analysis in a pedagogical university. On the material of the course «Differential Equations». Moscow, 2008. – 202 p. [in Russian]

Gerbekov, K.A. Differentsial'nyye uravneniya v sisteme professional'noy podgotovki uchiteley matematiki pedagogicheskogo vuza [Differential Equations in the System of Professional Training of a Mathematics Teacher in a Pedagogical University]. Moscow, 2001. – 117 p. [in Russian]

Nelson F. Using mathcad to simplify uncertainty computations in a laboratory course [Text] // Computer Applications in Engineering Education. – 2014. – Vol. 23. – №2. – P. 250-257. <https://doi.org/10.1002/cae.21593>

#### **Авторлар туралы мәлімет:**

**Г.Р. Коцанова** – корреспонденция үшін автор, педагогика ғылымдарының кандидаты, профессор, Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 32-нші шағын аудан, 1, 130003, Ақтау, Қазақстан.

**А.Б. Туркменбаев** – педагогика ғылымдарының кандидаты, профессор, Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 32-нші шағын аудан, 1, 130003, Ақтау, Қазақстан.

**Р.С. Шуакбаева** – педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент, Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 32-нші шағын аудан, 1, 130003, Ақтау, Қазақстан.

**Б.Т. Құлжагарова** – физика-математика ғылымдарының кандидаты, профессор, Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 32-нші шағын аудан, 1, 130003, Ақтау, Қазақстан.

**Г.А. Дүйсенбаева** – математика магистрі, Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, 32-нші шағын аудан, 1, 130003, Ақтау, Қазақстан.

**Г.А. Сугуржанова** – аға оқытушы, Қазақ-Ресей Медициналық университеті, Абылай хан даңғылы, 51/53, 050000, Алматы, Қазақстан.

**А.Б. Мукушев** – PhD (экономика), аға оқытушы, Қазақ технология және бизнес университеті, Қ.Мұхаметханов көшесі, 37 а, 010000 Астана, Қазақстан.

**С.Б. Мукушев** – педагогика ғылымдарының кандидаты, аға оқытушы, С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Жеңіс даңғылы, 62, 010000, Астана, Қазақстан.

**Б.А. Адильбекова** – аға оқытушы, көлік және коммуникация жоғары колледжі, Конституция көшесі 10, 020000, Астана қ., Қазақстан.

#### **Сведения об авторах:**

**Г.Р. Коцанова** – кандидат педагогических наук, профессор, Каспийский университет технологий и инжиниринга им. Ш.Есенова, 32-й микрорайон 1, 130003, Ақтау, Казахстан.

**А.Б. Туркменбаев** – кандидат педагогических наук, профессор, Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, 32-й микрорайон, 1, 130003, Ақтау, Казахстан.

**Р.С. Шуакбаева** – кандидат педагогических наук, доцент, Каспийский университет технологий и инжиниринга им. Ш.Есенова, 32-й микрорайон 1, 130003, Актау, Казахстан.

**Б.Т. Кулжагарова** – кандидат физико-математических наук, профессор, Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, 32-й микрорайон, 1, 130003, Актау, Казахстан.

**Г.А. Дуйсенбаева** – магистр математики, Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, 32-й микрорайон, 1, 130003, Актау, Казахстан.

**Г.А. Сугуржанова** – старший преподаватель, Казахстанско-Российский медицинский университет, проспект Абылай хана, 51/53, 050000, Алматы, Казахстан.

**А.Б. Мукушев** – кандидат экономических наук, Казахский университет технологий и бизнеса, ул. К. Мухаметханова, 37 а, 010000 Астана, Казахстан.

**С.Б. Мукушев** – автор-корреспондент, кандидат педагогических наук, Казахский агротехнический университет им. С.Сейфуллина, проспект Победы, 62, 010000, Астана, Казахстан.

**Б.А. Адильбекова** – старший преподаватель, высший колледж транспорта и коммуникаций, ул. Конституции 10, 020000, г. Астана, Казахстан.

#### **Information about authors:**

**G.R. Koshchanova** – Candidate of Pedagogical Sciences, Professor, Caspian University of Technologies and Engineering named after Sh. Esenov, 32nd microdistrict 1, 130003, Aktau, Kazakhstan.

**A.B. Turkmenbaev** – Candidate of Pedagogical Sciences, Professor, Caspian University of Technologies and Engineering named after Sh. Esenov, 32nd microdistrict 1, 130003, Aktau, Kazakhstan.

**R.S. Shuakbaeva** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Caspian University of Technologies and Engineering named after Sh. Esenov, 32nd microdistrict 1, 130003, Aktau, Kazakhstan.

**B.T. Kulzhagarova** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Caspian University of Technologies and Engineering named after Sh. Esenov, 32nd microdistrict 1, 130003, Aktau, Kazakhstan.

**G.A. Duisenbayeva** – Master of Mathematics, Caspian University of Technologies and Engineering named after Sh. Esenov, 32nd microdistrict, 1, 130003, Aktau, Kazakhstan.

**G.A. Sugurzhanova** – Senior Lecturer, Kazakhstan-Russian Medical University, Abylai Khan Avenue, 51/53, 050000, Almaty, Kazakhstan.

**A.B. Mukushev** – Candidate of Economic Sciences, Kazakh University of Technologies and Business, K. Mukhametkhanov str. 37 a, 010000 Astana, Kazakhstan.

**S.B. Mukushev** – Corresponding author, candidate of pedagogical sciences, Kazakh Agrotechnical University named after S.Seyfullin, K. Mukhametkhanov str. S.Seyfullin, 62 Victory Avenue, 010000, Astana, Kazakhstan.

**B.A. Adilbekova** – Senior Lecturer, Higher College of Transport and Communications, 10 Constitution St., 020000, Astana, Kazakhstan.